

24/2/21

Ιδιοτιμές - Ιδιοδιανύματα - Χαρακτηριστικό

Αντικ. Βρείτε αριθμούς (ιδιοτιμές) και διανύσματα (ιδιοδιανύματα) ώστε:

$$A u_i = \lambda_i \cdot u_i$$

$\uparrow$ $\uparrow$
 ιδιοτιμή $\uparrow$ ιδιοδιάνυσμα $\neq \vec{0}$

$\chi_A(\lambda) = \det(A - \lambda I)$: χαρακτηριστικό πολ/μο του A

P_i es του χαρακτηρισ = ιδιοτιμές του A

Ιδιοδιάνυσμα $u_i \in \ker(A - \lambda_i I)$

Ιδιοτιμές: 1) $\exists A^{-1} \Leftrightarrow \lambda_i \neq 0 \quad \forall i$

2) Αν $\lambda_i \neq 0$ είναι ιδιοτιμή του $A = P \lambda^k$ ιδιοτιμή του A^k

Ορισμός: Ένας πίνακας Αντικ. διαγωνοποιείται $\Leftrightarrow$ υπάρχει διαγώνιος Λ και αντιστρέψιμος P ώστε: $A = P \cdot \Lambda \cdot P^{-1}$

Π.χ. Να διαγωνοποιήσετε τον $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$

$$\chi_A(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \det \begin{pmatrix} 1-\lambda & -1 \\ 2 & -1-\lambda \end{pmatrix} = (\lambda-1) \cdot (\lambda+1) + 2 = \lambda^2 - 1 + 2 = \lambda^2 + 1 > 0 \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}$$

Ο A δεν διαγωνοποιείται στους πραγματικούς

$$\begin{array}{l|l|l} \lambda_1 = i & \lambda_1 + \lambda_2 = 0 = \text{trace } A & \text{Τα ιδιοδιανύσματα της} \\ \lambda_2 = -i & \lambda_1 \cdot \lambda_2 = -i^2 = 1 = \det A & \lambda_1 \text{ και } \lambda_2 \end{array}$$

$$\bullet (A - \lambda_1 I) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1-i & -1 \\ 2 & -1-i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (1-i)x - y = 0 \Rightarrow y = (1-i)x$$

$$\boxed{2x + (-1-i)y = 0} \Rightarrow 2x + (-1-i)(1-i)x = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (2 + (1+i)(i-1))x = 0 \Rightarrow (2 + i - 1)x = 0 \Rightarrow (2-2)x = 0$$

Ισχύει

Αυτά μας δίνουν δύο προς Σιμετινοσε

Το ιδιοδιάνυσμα της $\lambda_1 = i$ είναι το $(x, (1-i)x) = x(1, 1-i) \Rightarrow$
 $\Rightarrow u_1 = (1, 1-i)$

$$\bullet (A - \lambda_2 I) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1+i & -1 \\ 2 & -1+i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (1+i)x - y = 0 \Rightarrow y = (1+i)x$$

$$2x + (-1+i)y = 0$$

Το ιδιοδιάνυσμα της $\lambda_2 = -i$ είναι το $(x, (1+i)x) = x(1, 1+i) \Rightarrow$
 $\Rightarrow u_2 = (1, 1+i)$

$$A = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}, P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1-i & 1+i \end{pmatrix} \Rightarrow A = P \cdot \Lambda \cdot P^{-1} : \text{Διαγωνοποιείται}$$

στους μιγαδικούς

Πρόταση 1) Το άθροισμα των ιδιοτιμών του πίνακα A ισούται με το ίχνος του

2) Το γινόμενο των ιδιοτιμών του πίνακα A ισούται με τον ορίζοντα του

3) Ο A και ο A^t έχουν τις ίδιες ιδιοτιμές αλλά όχι αναγκαστικά ίδια ιδιοδιανύσματα

$$1) \chi_{AB}(\lambda) = \chi_{B^t A^t}(\lambda)$$

$$\text{Απόδειξη: } 3) \chi_A(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \det(A - \lambda I)^t = \det(A^t - \lambda I^t) = \det(A^t - \lambda I)$$

$$= \chi_{A^t}(\lambda)$$

$$4) \chi_{AB}(\lambda) = \chi_{B^t A^t}(\lambda) \stackrel{(3)}{\Rightarrow} \chi_{AB}(\lambda) = \chi_{AB}^t(\lambda) = \chi_{B^t A^t}(\lambda)$$

Θεώρημα: Αν ο $A_{n \times n}$ έχει n γρ. ανεξ. ιδιοδιανύσματα, τότε διαγωνοποιείται $A = P \Lambda P^{-1}$ με Λ διαγώνιος και P αντιστρέψιμος.
 $S =$ (ιδιοδιανύσματα είναι γενικά P.A.) βάση:

→ κανονική βάση

$$A_{\text{καν}} = \underbrace{P_{\text{καν}}^{-1}}_{\text{πινάκας}} \underbrace{\Lambda_S}_{\text{αλλαγής βάσης}} \underbrace{P_{\text{καν}}}_{\text{πινάκας}}$$

$A_{\text{καν}}$ πινάκας της γρ. απεικ. από καν. σε κανονική

Λ_S $\parallel$ - ίδιος $\parallel$ - $\parallel$ - S σε S

Π.χ. 1) Ποιος είναι ο πιο εύκολος πινάκας? Ο μοναδιαίος? και τι είδους πινάκας είναι αυτός? Διαγώνιος, άρα αν τον διαγωνοποιήσω θα πάρω τον εαυτό του!

I : Διαγώνιος, ιδιοτιμές = 1 με πολλαπλότητα n

$$\chi_I(\lambda) = \det(I - \lambda I) = (1 - \lambda)^n$$

2) $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$: Διαγώνιος άρα έχει βάση

$$\chi_A(\lambda) = \det \begin{pmatrix} -\lambda & 1 \\ 0 & -\lambda \end{pmatrix} = \lambda^2, \text{ Ρίζες } \lambda_1 = \lambda_2 = 0$$

Ιδιοδιανύσματα της $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$:

$$(A - 0 \cdot I) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 0 \cdot x + 1 \cdot y = 0 \\ 0 \cdot x + 0 \cdot y = 0 \end{cases}$$

τίποτα:

$y = 0$ και x : οποιαδήποτε

Ιδιοδιάνυσμα: $(x, 0) = x(1, 0)$, $u_1 = (1, 0) \in \text{NA}$ μόνο $\Rightarrow$ ΔΕΥ διαγωνοποιείται

$$A = \underset{\uparrow \text{ΔΕΥ } \exists \text{ ο } P}{P} \Lambda \cdot P^{-1}$$

Πρόταση: Σε διαφορετικές ιδιοτιμές αντιστοιχούν γρ. ανεξ. ιδιοδιανύσματα. Αν ο πίνακας έχει n διακεκριμένες, τότε διαγωνοποιείται

Απόδ: Με ερώτησ' στο πλήθος των διακεκριμένων ιδιοτιμών έστω $\lambda_1 \neq \lambda_2$ με $Au_1 = \lambda_1 u_1$ και $Au_2 = \lambda_2 u_2$. Δείχνουμε τα u_1, u_2 γρ. ανεξ. Υποθέτουμε ότι υπάρχουν α_1, α_2 όχι μηδέν με $\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 = \vec{0}$ $u_2 = -\frac{\alpha_1}{\alpha_2} u_1$

$$\begin{aligned} \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 = \vec{0} &\Rightarrow A(\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2) = A \cdot \vec{0} = \vec{0} = \vec{0} \\ \Rightarrow \alpha_1 Au_1 + \alpha_2 Au_2 = \vec{0} &\Rightarrow \alpha_1 \lambda_1 u_1 + \alpha_2 \lambda_2 u_2 = \vec{0} \Rightarrow \alpha_1 \lambda_1 u_1 - \alpha_2 \lambda_1 u_1 = \vec{0} \\ \Rightarrow (\alpha_1 \lambda_1 - \alpha_2 \lambda_1) u_1 = \vec{0}, u_1 \neq \vec{0}, \alpha_1 \neq 0 &\Rightarrow \alpha_1 (\lambda_1 - \lambda_2) u_1 = \vec{0} \\ &\neq 0 \neq 0 \neq \vec{0} \end{aligned}$$

Τα u_1, u_2 είναι δ.Α. Αν $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ διακεκριμένες μεταξύ τους ιδιοτιμές του πίνακα A και $u_1, \dots, u_k$ τα αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα. Υποθέτουμε $\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \dots + \alpha_k u_k = \vec{0}$ (όχι όλα μηδέν). Ας είναι ο $\alpha_1 \neq 0$

$$\alpha_1 u_1 = -\alpha_2 u_2 - \dots - \alpha_k u_k \Rightarrow u_1 = -\frac{\alpha_2}{\alpha_1} u_2 - \dots - \frac{\alpha_k}{\alpha_1} u_k$$

$$\begin{aligned} A(\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \dots + \alpha_k u_k) &= A \cdot \vec{0} = \vec{0} \Rightarrow \alpha_1 Au_1 + \alpha_2 Au_2 + \dots + \alpha_k Au_k = \vec{0} \\ \Rightarrow \alpha_1 \lambda_1 u_1 + \alpha_2 \lambda_2 u_2 + \dots + \alpha_k \lambda_k u_k &= \vec{0} \\ \Rightarrow \alpha_1 \lambda_1 \left(-\frac{\alpha_2}{\alpha_1} u_2 - \dots - \frac{\alpha_k}{\alpha_1} u_k \right) + \alpha_2 \lambda_2 u_2 + \dots + \alpha_k \lambda_k u_k &= \vec{0} \\ \Rightarrow (-\alpha_2 \lambda_1 + \alpha_2 \lambda_2) u_2 + \dots + (-\alpha_k \lambda_1 + \alpha_k \lambda_k) u_k &= \vec{0} \end{aligned}$$

$= \alpha_2 (\lambda_2 - \lambda_1) u_2 + \dots + \alpha_k (\lambda_k - \lambda_1) u_k = \vec{0}$ και $u_2, \dots, u_k$ είναι Γ.Α. ? Ναι, από την υπόθεση της επαγωγής αν έχουμε λιγότερες από k διαφορετικές ιδιοτιμές το αντίστοιχο ιδιοδιάνυσμα είναι Γ.Α.

Αρα οι αντεπεστές είναι όλοι μηδέν $\lambda_i \neq \lambda_1 \quad i=2, \dots, k$
 $\alpha_2 = \alpha_3 = \dots = \alpha_k = 0 \Rightarrow u_1 = -\alpha_2 u_2 - \dots - \alpha_k u_k = \vec{0}$ ΑΤΟΠΟ:
 Ιδιοδιάνυσμα $\neq \vec{0}$

Λήμμα: Όμοιοι πίνακες έχουν το ίδιο χαρακτηριστικό πολυώνυμο και ιδιοτιμές

Απόδ: Α όμοιος με τον Β $\Leftrightarrow A = P \cdot B \cdot P^{-1}$

$$\begin{aligned} \chi_A(\lambda) &= \det(A - \lambda I) = \det(P \cdot B \cdot P^{-1} - \lambda I) = \det(P \cdot B \cdot P^{-1} - \lambda P \cdot I \cdot P^{-1}) \\ &= \det(P (B - \lambda I) \cdot P^{-1}) = \det P \det(B - \lambda I) \det P^{-1} = \\ &= \det(B - \lambda I) = \chi_B(\lambda) \end{aligned}$$

Πορίσμα: Έστω $T: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ ($V^n \rightarrow V^n$) γρ. απεικόνιση.
 Επειδή οι πίνακες μιας γρ. απεικόνισης ως προς διαφορετικές βάσεις είναι όμοιοι μεταξύ τους, ορίζεται το χαρακτηριστικό πολυώνυμο της T σαν το χαρακτηριστικό πολυώνυμο ως προς οποιοδήποτε πίνακα της

$T: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ και 2 βάσεις S και S' του $\mathbb{R}^n$,
 T_S είναι όμοιος με τον $T_{S'}$. Από το προηγούμενο λήμμα $\chi_{T_S}(\lambda) = \chi_{T_{S'}}(\lambda)$. Αυτό θα είναι και το χαρακτηριστικό πολ/μο της $T: \chi_T(\lambda)$

Ορισμός: Το υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$ το οποίο περιέχει όλα τα ιδιοδιάνυσμα μιας ιδιοτιμής λ ενός πίνακα A μαζί με το μηδενικό διάνυσμα καλείται ιδιοχώρος της λ και συμβολίζεται με $V_A(\lambda)$

Πηλίκο: Αν λ είναι ιδιοτιμή του πίνακα A , τότε: $V_A(\lambda) = \ker(A - \lambda I)$
Αποδ.

Αν u είναι ιδιοδιάνυσμα της λ τότε $u \in V_A(\lambda)$. Επίσης:

$$Au = \lambda u \Rightarrow Au - \lambda u = \vec{0} \Rightarrow (A - \lambda I)u = \vec{0} \Rightarrow u \in \ker(A - \lambda I).$$

Απο: $V_A(\lambda) \subseteq \ker(A - \lambda I)$ (+) Έστω $u \in \ker(A - \lambda I) \Rightarrow (A - \lambda I)u = \vec{0}$
 $\Rightarrow Au - \lambda I \cdot u = \vec{0} \Rightarrow Au = \lambda u \Rightarrow u \in V_A(\lambda)$. Απο:

$$\ker(A - \lambda I) \subseteq V_A(\lambda) \quad (+)$$

$$(+), (+) \Rightarrow V_A(\lambda) = \ker(A - \lambda I)$$

Πόρισμα: Οι ιδιοχώροι ενός πίνακα A και αντιστοιχούν ευθύ
αθροίσμα.

Αποδ.

Αν $\lambda_i \neq \lambda_j$ ιδιοτιμές του A και u_i, u_j αντίστοιχα ιδιοδιάνυσμα
στο λ_i και λ_j είναι π.α. Αλλά $u_i \in V_A(\lambda_i)$ και $u_j \in V_A(\lambda_j) \Rightarrow$
 $\Rightarrow V_A(\lambda_i) \cap V_A(\lambda_j) = \{\vec{0}\}$. Απο το άθροισμα είναι ευθύ.

Αντ: αν $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ είναι όλες οι διακεκριμένες ιδιοτιμές του
 A , τότε:

$$V_A(\lambda_1) \oplus V_A(\lambda_2) \oplus \dots \oplus V_A(\lambda_k)$$

Θεώρημα: Η διάσταση του ιδιοχώρου $V_A(\lambda_i)$ μιας ιδιοτιμής λ_i
του πίνακα A είναι μικρότερη ή ίση της πολitzας της λ_i στο
χαρακτηριστικό πολ/μο.

$$\dim(V_A(\lambda_i)) \leq \text{πολitzας της } \lambda_i \text{ στο χαρακτηριστικό πολ/μο}$$

Αποδ. Αν ο A έχει $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ διακεκριμένες ιδιοτιμές τότε:

$$\chi_A(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{m_1} (\lambda - \lambda_2)^{m_2} \dots (\lambda - \lambda_k)^{m_k}. \text{ Το } m_i \text{ είναι η πολ/za}$$

της αντίστοιχης ρίζας λ_i . Πρέπει να δείξουμε ότι:

$\dim V_A(\lambda_i) = r$. Απο ο $V_A(\lambda_i)$ έχει μια βάση από r ιδιοδιάνυσμα
της λ_i

$$V_A(\lambda_i) = \langle u_1, \dots, u_r \rangle \Rightarrow Au_1 = \lambda_i u_1, Au_2 = \lambda_i u_2, \dots, Au_r = \lambda_i u_r$$

ΕΡΕΥΝΟΥΜΕ το βάθος του NACl σε βάθος του H^+

$$R^n = \langle u_1, \dots, u_r, v_{r+1}, \dots, v_n \rangle$$

Με $TA: IR^4 \rightarrow IR^4$ θα συμβολίζουμε την επ. αντιστροφή η οποία ορίζεται μέσω του πίνακα A . Άρα:

$$TAKU1 = \overset{98}{2}i_1, TAKU2 = 2i_2, \dots, TAKUr = 2i_r.$$

0 Niveaus des TA was gibt es bei $S = (u_1, \dots, u_r, v_{r+1}, \dots, v_n)$

Θα έχει μορφή:

$$\begin{pmatrix} \lambda_i & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} * & \dots & * \\ * & & * \\ * & & * \\ \vdots & & \vdots \\ * & \dots & * \\ * & & * \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & & B \end{pmatrix} \begin{matrix} * \\ * \\ * \\ \vdots \\ * \\ * \\ \vdots \\ * \end{matrix}$$

$$\begin{aligned} \chi_{T_A}(\lambda) &= \chi_C(\lambda) = \det(C - \lambda I) = \\ &= \det\left(\begin{pmatrix} \lambda_i & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_i \end{pmatrix} - \lambda \cdot I_{n \times n}\right) \cdot \\ &\quad \cdot \det(B - \lambda I_{(n-r) \times (n-r)}) = \\ &= \det\begin{pmatrix} \lambda_i - \lambda & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_i - \lambda \end{pmatrix} \det(B - \lambda I_{(n-r) \times (n-r)}) = \\ &= (\lambda_i - \lambda)^n \det(B - \lambda I_{(n-r) \times (n-r)}) = \chi_{T_A}(\lambda) = \chi_A(\lambda) \Rightarrow \end{aligned}$$

$\Rightarrow \boxed{(\lambda_i - \lambda)^r}$ διαφέρει το $\chi_A(\lambda) = \pm (\lambda - \lambda_1)^{m_1} \dots (\lambda - \lambda_k)^{m_k} \Rightarrow$
 νόρμα $\Rightarrow r \leq m_i \Rightarrow$ Διαφορετικές $\lambda_i \neq \lambda_j \neq \dots \neq \lambda_k$

$\dim(VA(X_i)) \cdot r \leq m_i = \text{normalizirano izraženo na } X_i$

Πείραμα: Ένας πίνακας A $n \times n$ διαγωνοποιείται αν-ν έχει n γραμμικά ανεξάρτητα ιδιοδιανύσματα $\Leftrightarrow \mathbb{R}^n = V_A(\lambda_1) \oplus \dots \oplus V_A(\lambda_k)$ με τι, ώστε οι διαμεσολαβούμενες ιδιοτιμές του A $\neq \emptyset$.

ότι $V_{\star}(i) = \text{πολτα της } \lambda_i \text{ στο χαρ/κο πολ/κο για } i=1, \dots, k$

σύνολος
↓

Απόδ. A διαγ $\Leftrightarrow$ έχει n γγ. ανεξ. ιδιοδιανύσματα: $P = (v_1, v_2, \dots, v_n)$

$$\deg(\chi_A(\lambda)) = \deg \left(\det \begin{pmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} - \lambda \end{pmatrix} \right) = n = \dim \mathbb{R}^n$$

$$I = \begin{pmatrix} \lambda & \dots & 0 \\ 0 & \dots & \lambda \end{pmatrix}$$

$$\chi_A(\lambda) = \pm (\lambda - \lambda_1)^{w_1} \dots (\lambda - \lambda_k)^{w_k} \quad n = w_1 + w_2 + \dots + w_k \geq \dim V_A(\lambda_1) + \dots + \dim V_A(\lambda_k)$$

$$\chi_A(\lambda) = \pm (\lambda - \lambda_1)^{w_1} \dots (\lambda - \lambda_k)^{w_k} \quad \text{Θέλουμε } \mathbb{R}^n = V_A(\lambda_1) \oplus \dots \oplus V_A(\lambda_k) \Leftrightarrow n = \dim V_A(\lambda_1) + \dots + \dim V_A(\lambda_k)$$

$$\Leftrightarrow \dim V_A(\lambda_1) = w_1, \dim V_A(\lambda_2) = w_2, \dots, \dim V_A(\lambda_k) = w_k$$